L'homothétie

1°) Définition

Pour une figure avec applet java, voir :
http://dpernoux.free.fr/ExPE1/homo.htm

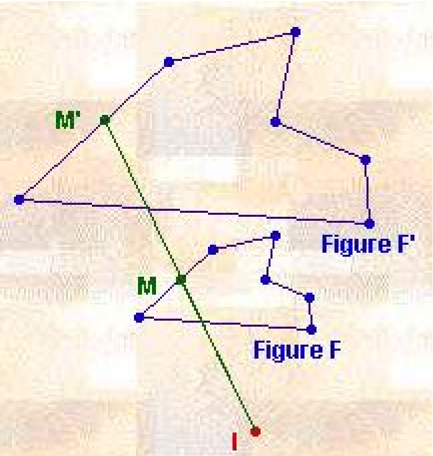
Etant donné un point I et un nombre k non nul, on appelle homothétie de centre I et de rapport k la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :

- les points I, M et M' sont alignés
- M' est sur la même demi-droite d'origine I que M si $k > 0$
  M' n'est pas sur la même demi-droite d'origine I que M si $k < 0$
- la distance de I à M' est égale à $|k|$ fois la distance de I à M

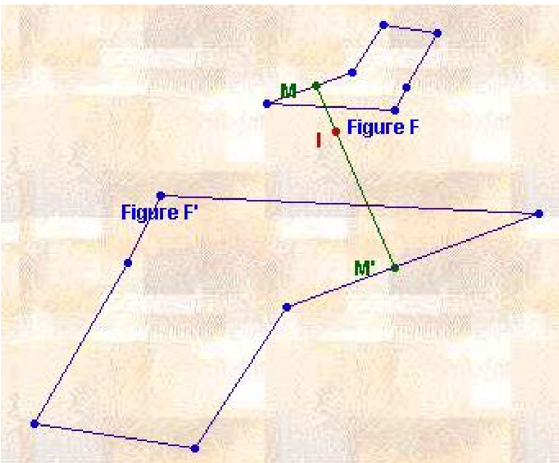
Exemples : si k = 2, IM' = 2IM
si k = -3, IM' = 3IM

Exemples :

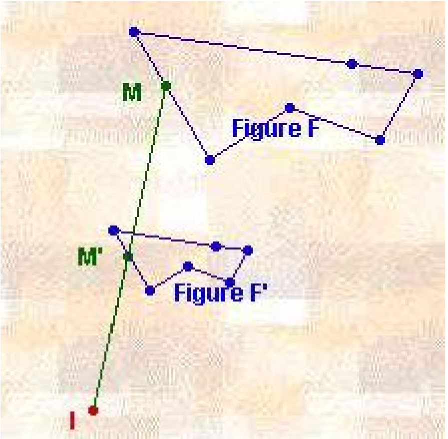
Homothétie de centre I et de rapport 2



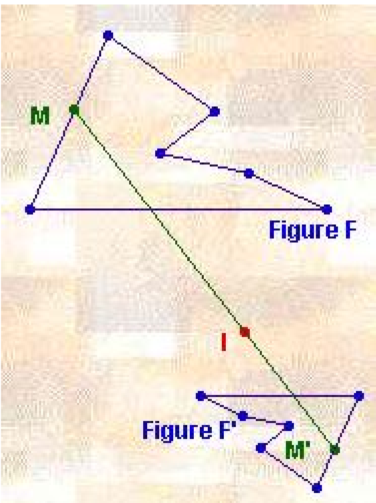
Homothétie de centre I et de rapport -3



Homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$



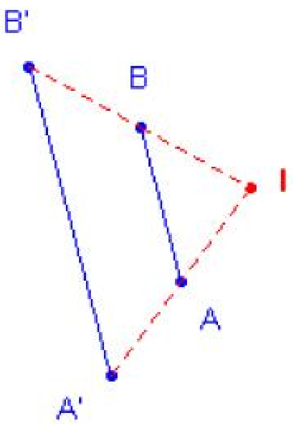
Homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$



2°) Propriétés :

a) Si A’ et B’ sont les images respectives de A et B dans une homothétie alors :
(A’B’) est parallèle à (AB) et A’B’ = $|k| \times$ AB

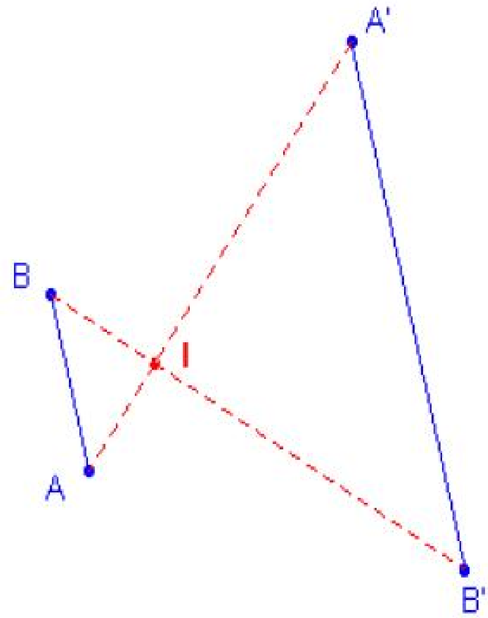
Premier exemple avec k = 2



$A'B' = 2AB$

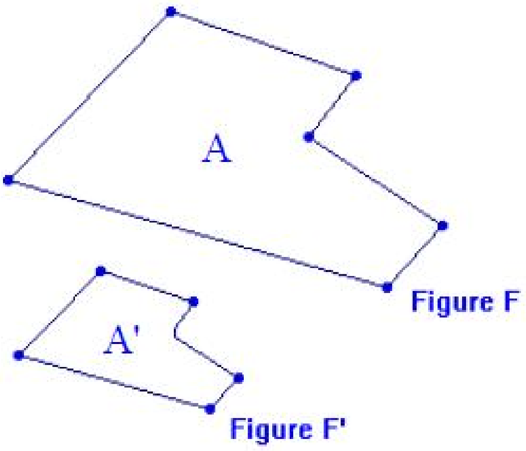
Deuxième exemple avec k = -3

$A'B' = |-3| \times AB = 3AB$



b) Si une figure F’ est l’image d’une figure F dans une homothétie de centre I et de rapport k et si F a une aire égale à A alors F’ a une aire égale à $k^2 \times$ A.

Exemple avec $k = \frac{1}{2}$:



$$A' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times A = \frac{1}{4}A$$

c) Triangles homothétiques :

Si le triangle A’B’C’ est l’image du triangle ABC dans une homothétie de rapport k alors les longueurs des côtés du triangle A’B’C’ sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC (le rapport de proportionnalité vaut $|k|$).

Par contre, si les longueurs des côtés du triangle A’B’C' sont proportionnelles aux longueurs des côté du triangle ABC, les triangles ne sont pas nécessairement homothétiques ; dans le cas général, ils sont seulement semblables.

Si le triangle A'B'C’ est l'image d'un triangle ABC dans une homothétie, alors les angles du triangle A’B’C'' sont égaux aux angles du triangle ABC.

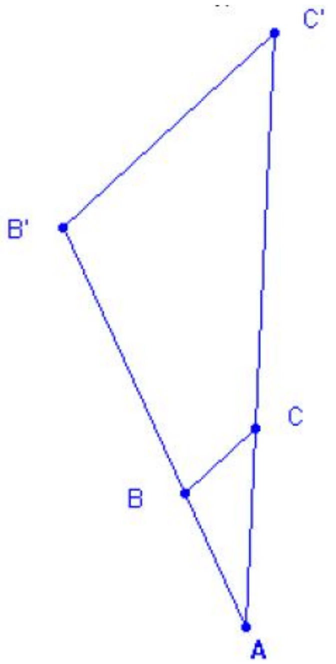
Par contre si les angles d'un triangle A’B’C' sont égaux aux angles d'un triangle ABC, les triangles ne sont pas nécessairement homothétiques ; dans le cas général, ils sont seulement semblables.

Remarques :

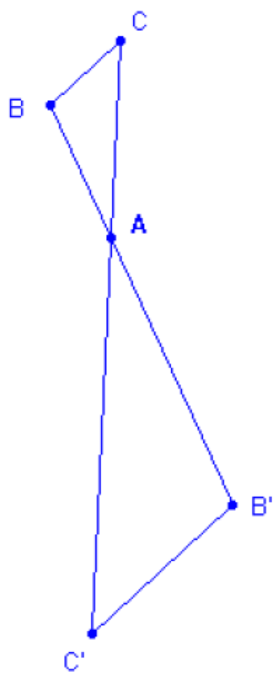
Pour la notion de triangles isométriques voir :
http://dpernoux.free.fr/trianglesihs .pdf (paragraphe I)

Et pour la notion de triangles semblables, voir http://dpernoux.free.fr/trianglesihs .pdf (paragraphe III) et http://dpernoux.free.fr/ExPE1/simili.htm

d) Cas particulier de triangles homothétiques :



ou



Le triangle A’B’C’ est l’image du triangle ABC dans une homothétie de centre A.

3°) Exercice (voir figure page suivante)

a) Tracer la figure F’ image de la figure F dans l’homothétie de centre I et de rapport 3.

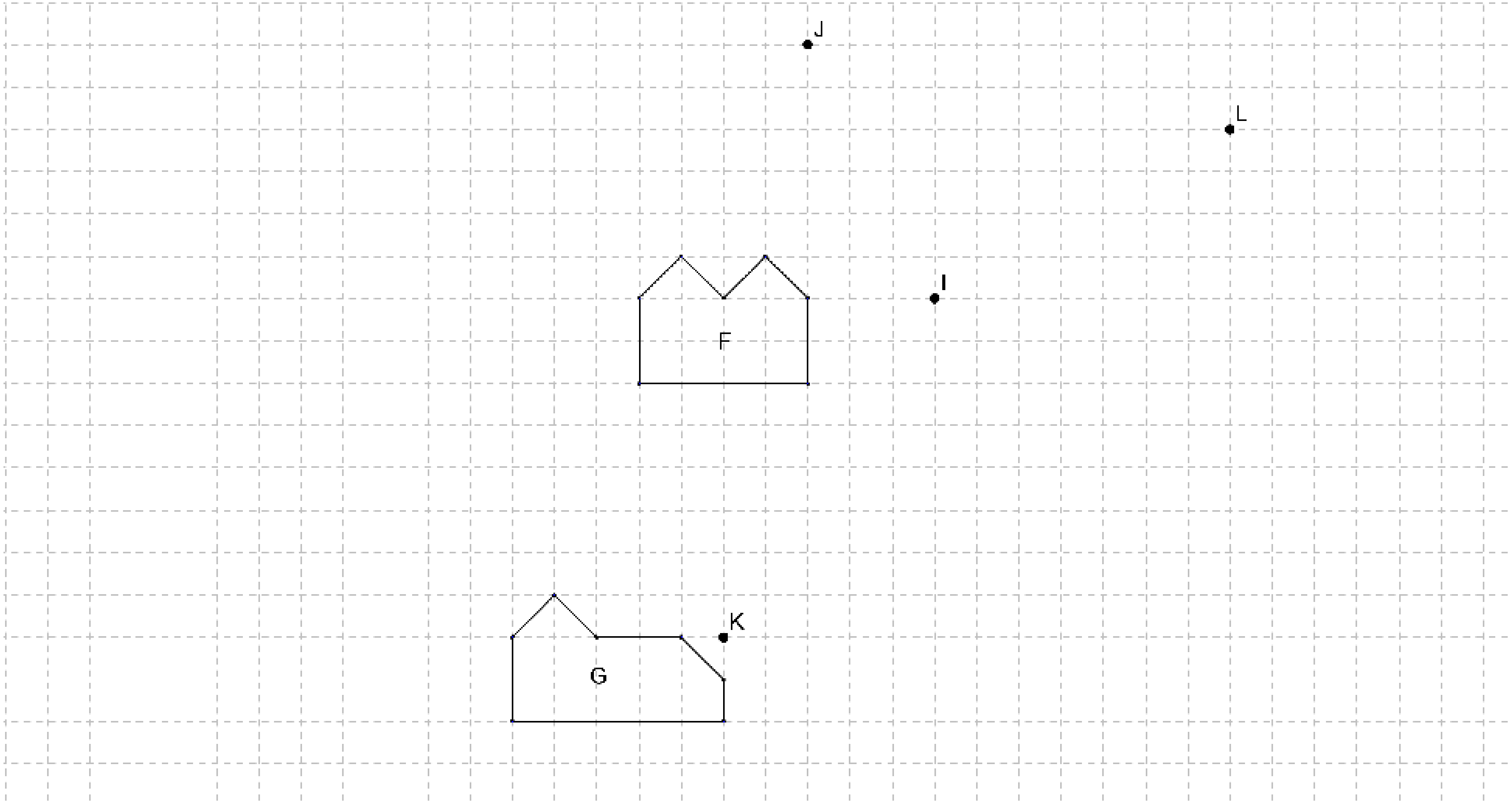
b) Tracer la figure F’’ image de la figure **F’** dans l’homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{3}$.

c) Par quel type de transformation peut-on passer directement de la figure F à la figure F’’ ? (on ne demande pas de démonstration)

d) Tracer la figure G’ image de la figure G dans l’homothétie de centre K et de rapport - 2.

e) Tracer la figure G’’ image de la figure **G’** dans l’homothétie de centre L et de rapport $\frac{1}{2}$

f) Par quel type de transformation peut-on passer directement de la figure G à la figure G’’ ? (on ne demande pas de démonstration)



Si vous voulez consulter, la solution de cet exercice, voir : http://dpernoux.free.fr/ExPE1/solhomo.pdf