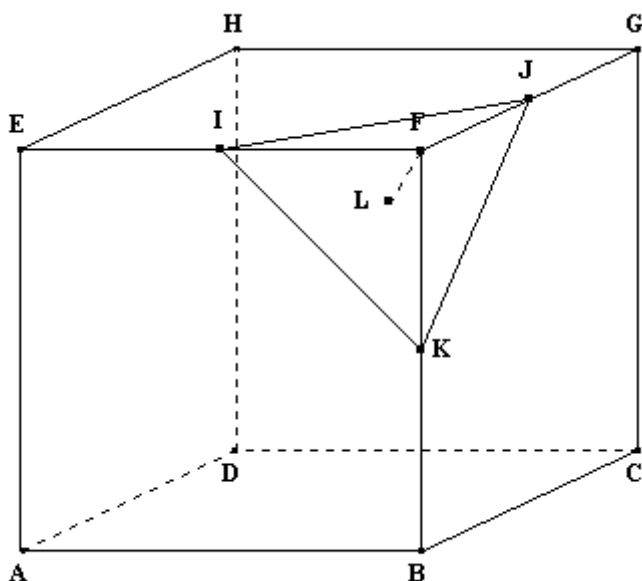


Corrigé



1°)

a) Comme le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times A \times h$ (où A est l'aire de base et h la hauteur) et, comme la hauteur du tétraèdre IJK associée à la face IFK est le segment [FJ] (car la droite (FJ) est orthogonale au plan IFK), on en déduit que :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de IFK} \times FJ = \frac{1}{3} \times \frac{IF \times FK}{2} \times FJ = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{48}.$$

Donc $V = \frac{a^3}{48}.$

b) Si $a = 4$ cm alors $V = \frac{4^3}{48} \text{ cm}^3 = \frac{64}{48} \text{ cm}^3 = \frac{4}{3} \text{ cm}^3 \approx 1,333 \text{ cm}^3$

c)

I est le milieu de [EF] et J est le milieu de [FG].

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (IJ) est parallèle à la droite (EG).

De plus $\frac{IJ}{EG} = \frac{FI}{FE} = \frac{1}{2}$ donc $IJ = \frac{1}{2}EG.$

Par ailleurs $EG = a\sqrt{2}$ (Démonstration : d'après le théorème de Pythagore, $EG = \sqrt{EF^2 + FG^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ (car $a > 0$)).

On en déduit que $IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$

On démontre de même que $JK = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $KI = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Le triangle IJK est donc un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Le triangle IJK a donc une aire égale à : $\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \sqrt{3}}{4}$ soit $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

(Explications : un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur c a des hauteurs de longueur $\frac{c\sqrt{3}}{2}$ et donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times c \times \frac{c\sqrt{3}}{2}$ soit $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$)

Comme le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times A \times h$ (où A est l'aire de base et h la hauteur) et, comme la hauteur du tétraèdre IJK associée à la face IJK est le segment [FL], on en déduit que :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \times FL.$$

$$\text{Donc : } FL = \frac{24 \times V}{a^2\sqrt{3}} = \frac{24 \times \frac{a^3}{48}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (= \frac{a\sqrt{3}}{6})$$

$$\text{Donc : } FL = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{d) Si } a = 4 \text{ cm, alors } FL = \frac{4}{2 \times \sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm} \approx 1,155 \text{ cm.}$$

2°)

a) La surface du cuboctaèdre se compose de six carrés dont les côtés ont une longueur égale à IK (soit $\frac{a}{\sqrt{2}}$) et de huit triangles équilatéraux identiques au triangle IJK.

D'où :

$$S = 6 \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})a^2.$$

$$\text{b) Si } a = 4 \text{ cm alors } S = (3 + \sqrt{3}) \times 16 \text{ cm}^2 \approx 75,71 \text{ cm}^2.$$

c) Le volume du cuboctaèdre est égal au volume du cube diminué des volumes des huit tétraèdres.

Donc :

$$V' = a^3 - 8 \times \frac{a^3}{48} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}.$$

d) Si $a = 4$ cm alors

$$V' = \frac{5 \times 4^3}{6} \text{ cm}^3 = \frac{5 \times 2^6}{3 \times 2} \text{ cm}^3 = \frac{5 \times 2^5}{3} \text{ cm}^3 = \frac{160}{3} \text{ cm}^3 \approx 53,333 \text{ cm}^3.$$