Proposition de corrigé pour le premier concours blanc de mathématiques du site de Colmar (2006-2007)

<u>**Exercice n° 1**</u> (Cours : voir http://pernoux.perso.orange.fr/ensnom.pdf, page 3 en particulier)

1°) $\frac{17}{8}$ est une fraction irréductible et $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3}$. Comme la décomposition du dénominateur ne fait pas apparaître d'autre facteur que 2 ou 5, $\frac{17}{8}$ est un nombre décimal.

$\frac{8}{17}$ est une fraction irréductible et 17 est un nombre premier. Comme la décomposition du dénominateur fait apparaître un autre facteur que 2 ou 5, $\frac{8}{17}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{2794}{55} = \frac{254}{5}$. La fraction $\frac{254}{5}$ est une fraction irréductible. Comme la décomposition du dénominateur ne fait pas apparaître d'autre facteur que 2 ou 5, $\frac{2794}{55}$ est un nombre décimal.

$\frac{1096}{152} = \frac{137}{19}$. La fraction $\frac{137}{19}$ est une fraction irréductible. Comme la décomposition du dénominateur fait apparaître un autre facteur que 2 ou 5, $\frac{1096}{152}$ n'est pas un nombre décimal.

2°) $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100a + 10(a + c) + c = 110a + 11c = 11(10a + c)$

10a+c est un nombre entier (car a et c sont des nombres entiers) donc $\overline{abc}$ s'écrit 11×k avec k entier donc, si b = a + c, alors $\overline{abc}$ est un multiple de 11.

Remarque : on a démontré que si b = a+c alors $\overline{abc}$ est divisible par 11 (ce qui était demandé) mais il existe d'autres nombres $\overline{abc}$ divisibles par 11 (exemple : 759)

Questions complémentaires

a)
- On peut jouer sur le fait de choisir ou pas des écritures avec une même partie entière : si les parties entières sont différentes on n'a pas besoin de s'intéresser aux chiffres écrits après la virgule alors que ce n'est pas le cas si les parties entières sont les mêmes.

- Si on utilise des écritures avec une même partie entière, on peut jouer sur le nombre de chiffres après la virgule : si le nombre de chiffres après la virgule pour les deux nombres est le même, l'élève peut utiliser la procédure qui consiste à dire, par exemple, que 12,26 est plus petit que 12,34 car 26 est plus petit que 34 mais cette procédure ne conduira pas toujours l'élève a la bonne réponse si le nombre de chiffres après la virgule n'est pas le même pour les deux nombres

- Si on utilise des écritures avec une même partie entière et des nombres de chiffres après la virgule différents, on peut jouer sur le choix des chiffres après la virgule : trouver "la bonne réponse" lors de la comparaison de 12,26 et 12,1 peut se faire en utilisant une procédure erronée "classique" (12,1 < 12,26 car 1 < 12) mais cette même procédure ne conduit pas à "la bonne réponse" quand il s'agit de comparer 12,26 et 12,3.

Remarque :
On peut présenter les réponses précédentes sous la forme d'un tableau :

Variable didactique	Valeurs de la variable	Influence sur les procédures utilisées
Parties entières des deux nombres	- identiques - différentes	- on doit s'intéresser aux chiffres après la virgule - on n'a pas besoin de s'intéresser aux chiffres après la virgule
Nombres de chiffres après les virgules quand les parties entières sont les mêmes	- identiques -différents	- la procédure P qui consiste à dire que 12,26 < 12,34 car 26 < 34 conduit toujours à "la bonne réponse" - la procédure P ne conduit pas toujours à "la bonne réponse"
Chiffres après les virgules quand les parties entières sont les mêmes et les nombres de chiffres après les virgules sont différents	- chiffres tels que le nombre ayant le plus de chiffres après la virgule soit le plus grand - chiffres tels que le nombre ayant le plus de chiffres après la virgule soit le plus petit	- la procédure P conduit à "la bonne réponse" - la procédure P ne conduit pas à "la bonne réponse"

b)

Première possibilité :

$$12{,}26 = 12 + \frac{26}{100}$$

$$12{,}3 = 12{,}30 = 12 + \frac{30}{100}$$

$$\frac{26}{100} < \frac{30}{100} \text{ donc } 12{,}26 < 12{,}3$$

Deuxième possibilité :

Je regarde les chiffres des dizaines : 1=1
Je regarde les chiffres des unités : 2=2
Je regarde les chiffres des dixièmes : 2<3 donc 12,26 < 12,3

c) Première réponse erronée possible :
12,3 < 12,26 car 3 < 26 (les décimaux sont conçus comme deux nombres entiers juxtaposés séparés par une virgule)

Deuxième réponse erronée possible :
12,3 < 12,26 car 12,3 a moins de chiffres que 12,26 (application d'une règle qui est valable pour les entiers)

Exercice n° 2

1°) Pour un polygone régulier, les angles au centre correspondant aux différents côtés du polygone sont égaux donc $\widehat{HOG} = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

Le triangle HOB est isocèle de sommet O (car OH = OB) donc $\widehat{OHB} = \widehat{HBO}$.

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on en déduit que $\widehat{HBO} = \dfrac{180° - \widehat{HOB}}{2}$.

Or $\widehat{HOB} = 2 \times \widehat{HOA} = 2 \times 45° = 90°$. Donc $\widehat{HBO} = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$.

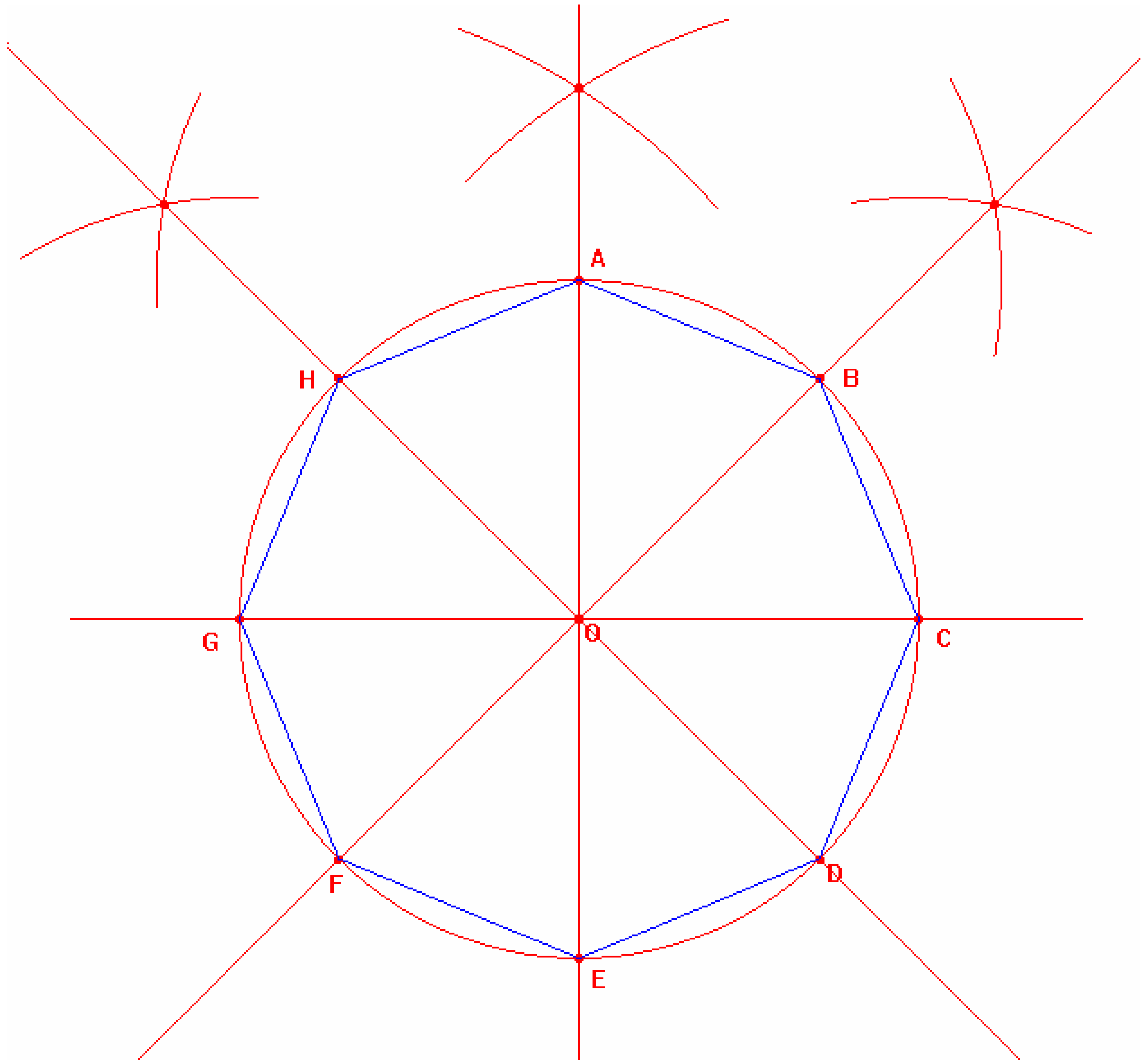
En utilisant une démonstration analogue, on a, par ailleurs, $\widehat{OBE} = \dfrac{180° - 135°}{2} = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$.

On en déduit que : $\widehat{HBE} = \widehat{HBO} + \widehat{OBE} = 45° + 22{,}5° = 67{,}5°$.

Remarque (autre méthode pour le calcul de $\widehat{HBE}$) :

$\widehat{HBE}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{HE}$ que l'angle au centre $\widehat{HOE}$ donc $\widehat{HBE} = \dfrac{\widehat{HOE}}{2} = \dfrac{3 \times 45°}{2} = 67{,}5°$.

2°)



D. Pernoux http://pernoux.perso.orange.fr

3°)

a) Première condition : la pyramide étant régulière de sommet S, on doit avoir :
SA = SB = SC = SD = SE = SF = SG

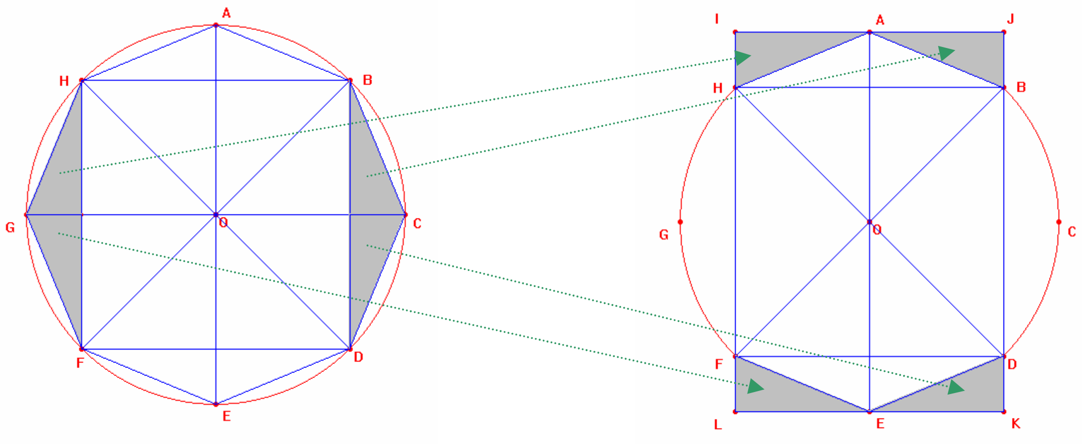
Deuxième condition : les longueurs des arêtes d'extrémités S doivent être supérieures au rayon du cercle. On doit donc avoir : SA > OA.

b) SOA est un triangle rectangle en O donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (en cm)}$.

c) Soit V le volume de la pyramide.
$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire (ABCDEFGH)} \times SO$
Calcul de l'aire de ABCDEFGH :

Première méthode :

L'octogone régulier ABCDEFGH a même aire que le rectangle IJKL obtenu en déplaçant quatre triangles selon le procédé ci-dessous :



L'aire de l'octogone ABCDEFGH est donc égale à : AE × HB
Appelons R le rayon du cercle.
AE = 2R et HB = $R\sqrt{2}$ (car $HB = \sqrt{HO^2 + OB^2} = \sqrt{2R^2}$ puisque HOB est un triangle rectangle isocèle de sommet O).
L'aire de l'octogone ABCDEFGH est donc égale à $2R \times R\sqrt{2}$ soit $2R^2\sqrt{2}$.

Deuxième méthode :

L'aire de l'octogone ABCDEFGH est égale à huit fois l'aire du triangle OAB.
Si on appelle K le projeté orthogonal de A sur [OB], comme l'angle $\widehat{AOB}$ vaut 45°, on en déduit que le triangle, rectangle en K, AOK est un triangle isocèle. En appliquant le théorème de Pythagore à ce triangle, on trouve : $2AK^2 = R^2$ donc $AK = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

L'aire de OAB vaut donc $\frac{OB \times AK}{2}$ soit $\frac{R \times \frac{R}{\sqrt{2}}}{2}$ soit $\frac{R^2}{2\sqrt{2}}$.

Remarque : si on choisit la hauteur issue de A pour calculer l'aire de OAB, en utilisant la trigonométrie, on peut trouver que l'aire de OAB vaut R²× sin(22,5°)×cos(22,5°), résultat exact mais à simplifier ... (méthode pas "astucieuse")

A retenir : pour calculer l'aire d'un triangle, chercher quelle hauteur permet le calcul le plus facile.

L'aire de l'octogone ABCDEFGH est donc égale à $8 \times \dfrac{R^2}{2\sqrt{2}}$ soit $2R^2\sqrt{2}$

Conclusion : le volume V de la pyramide est égal à

$\dfrac{1}{3} \times \text{Aire (ABCDEFGH)} \times SO = \dfrac{1}{3} \times 2R^2\sqrt{2} \times SO = \dfrac{2R^2\sqrt{2}}{3} \times SO$

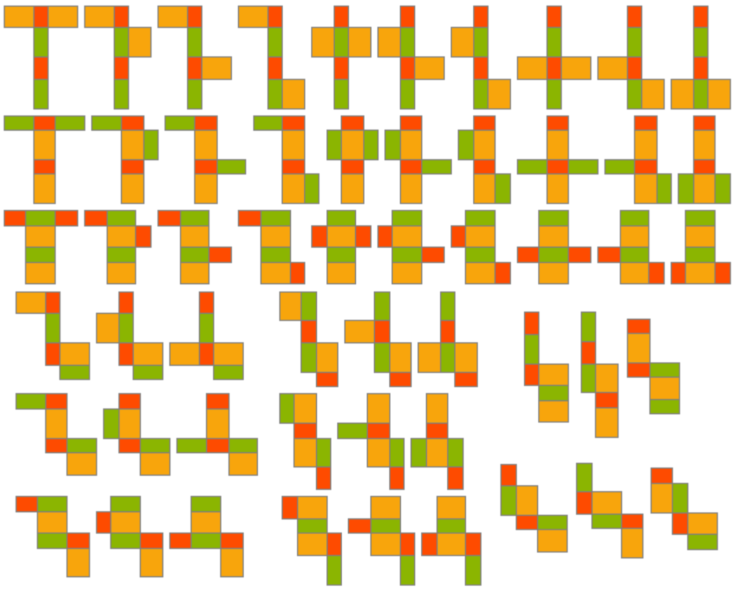
Application numérique avec R = 5 cm et SO = 12 cm :

V = $\dfrac{2 \times 25\sqrt{2}}{3} \times 12 \text{ cm}^3 = 200\sqrt{2} \text{ cm}^3 \approx 283 \text{ cm}^3$

Questions complémentaires

a) Un patron d'un solide est une figure plane faite d'un seul morceau, telle que, uniquement par pliage et sans chevauchement de faces, on puisse obtenir ce solide.

b) Quatre patrons parmi ceux-ci :



Source des ces images : http://fr.maths.free.fr/maths/mnr/six-lec/sixlec12/sixlec12.htm

(adresse de la page d'entrée du site : http://fr.maths.free.fr)

c) Règle et équerre sont interdites pour centrer l'attention des élèves sur la nature et l'organisation des faces en évacuant les difficultés de reproduction des faces avec les instruments. Remarque : les élèves vont utiliser la boîte comme gabarit pour construire le patron ce qui devrait les aider à bien concevoir comment on constuit un patron.

d) Erreurs possibles :

- il manque une ou plusieurs faces
- il y a trop de faces
- non adjacence des arêtes.

(autre réponse possible : des faces mal placées se superposent au pliage)

<u>Exercice n° 3</u>

1°) La situation donnée fait référence à la notion de proportionnalité. En effet, pour un mélange donné, le nombre de parts de chocolat est proportionnel au nombre de parts de lait.

Remarques :
- si l'on considère la situation de proportionnalité ci-dessus, pour le mélange A, le coefficient de proportionnalité est égal à 1,5 alors que, pour le mélange B, le coefficient de proportionnalité est égal à 2.
- on peut, me semble-t-il, accepter aussi comme réponse à cette question : "La situation donnée fait référence à la notion de fraction"

2°) Première méthode :

La proportion de chocolat dans le mélange A est égal à $\frac{3}{5}$ (soit 60 %) alors que dans le mélange B la proportion de chocolat est égale à $\frac{2}{3}$ (soit environ 67 %). Le mélange qui a le plus le goût de chocolat est donc le mélange B.

Deuxième méthode :
Dans le mélange A il y a 2 fois plus de lait que dans le mélange B mais seulement 1,5 fois plus de chocolat que dans le mélange B. Le mélange qui a le plus le goût de chocolat est donc le mélange B.

Questions complémentaires

a)
♦ Linda ne tient compte que du nombre de parts de chocolat dans les mélanges. Sa conclusion est donc erronée.

♦ Nathalie met implicitement en œuvre le fait que le nombre de parts de chocolat pour un mélange ayant un goût donné est proportionnel au nombre de parts de lait en disant que si le mélange A avait le même goût que B, il devrait y avoir dans le mélange A 4 parts de chocolat pour 2 parts de lait.

♦ Célia utilise une propriété erronée (assez "classique" dans les problèmes de proportionnalité) :

+1

Nombre de parts de lait dans le mélange B	1	2
Nombre de parts de chocolat dans le mélange B	2	3

+1

♦ Les explications données par Loïc ne permettent pas de comprendre à coup sûr le raisonnement utilisé mais on peut émettre l'hypothèse qu'il ne regarde que le nombre de parts de lait dans les mélanges. Si c'est bien le cas, son raisonnement est erroné (même si la réponse est "exacte").

♦ On peut penser qu'Antoine met implicitement en œuvre le fait que le nombre de parts de chocolat pour un mélange ayant un goût donné est proportionnel au nombre de parts de lait puisque ce qu'il écrit signifie très certainement que pour le mélange A il y a 1,5 parts de chocolat pour une part de lait.

b) Dans la recette A, pour une part de lait, il y a $1 + \frac{1}{2}$ parts de chocolat alors que, dans la recette B, pour une part de lait, il y a deux parts de chocolat. C'est donc la recette B qui fournit le mélange ayant le plus le goût de chocolat.

Exercice n° 4

$\overline{1a3b}$ est divisible par 18 si et seulement si $\overline{1a3b}$ est divisible par 2 et par 9 (car 2 et 9 sont premiers entre eux autrement dit car 2 et 9 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1)

$\overline{1a3b}$ est divisible par 9 si et seulement si $a + b + 4$ est divisible par 9 autrement dit si et seulement si $a + b = 5$ ou $a + b = 14$ (car $0 \leq a + b \leq 18$ puisque $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$).

$\overline{1a3b}$ est divisible par 2 si et seulement si b est pair.

D'où les cinq solutions obtenues en examinant tous les cas possibles :

Pour $a + b = 5$

b= 0 et a = 5	$\overline{1a3b} = 1530$
b= 2 et a = 3	$\overline{1a3b} = 1332$
b= 4 et a = 1	$\overline{1a3b} = 1134$

Pour $a + b = 14$

b= 6 et a = 8	$\overline{1a3b} = 1836$
b= 8 et a = 6	$\overline{1a3b} = 1638$