Proposition de corrigé pour le sujet de mathématiques du concours blanc n°2 donné à l'IUFM d'Alsace le 22 février 2007

Exercice 1

1°) Comme 842 n'est pas un multiple de 20, les 20 caisses ne peuvent pas être toutes pleines mais, comme le libraire remplit complètement une caisse avant de passer à la suivante, il ya 19 caisses pleines et une caisse pas pleine.
19 caisses pleines sont expédiées.

2°) Soit x le nombre de livres contenus dans une caisse pleine.
On doit avoir $842 = 19x + y$ avec $0 < y < x$

On en déduit que $19x = 842 - y$.

Comme $0 < y$, on doit avoir :
$19x < 842$ soit $x \leq 44$ (car x est un entier)
et
comme $y < x$, on doit aussi avoir :
$19x > 842 - x$ soit $20x > 842$ soit $x \geq 43$ (car x est un entier).

Il n'y a donc que deux possibilités : $x = 43$ et $x = 44$.

Vérification :
Si $x = 43$, il y 43×19 livres soit 817 livres dans les 19 premières caisses et 25 livres dans la dernière caisse.
Si $x = 44$, il y 44×19 livres soit 836 livres dans les 19 premières caisses et 6 livres dans la dernière caisse.

3°)
a) Un libraire dispose d'un lot de 842 livres identiques. A l'aide de ces livres, il veut remplir complètement le maximum possible de caisses pouvant contenir 19 livres. Combien de caisses peut-il remplir ?

b) Un libraire veut répartir équitablement le plus possible de livres tirés d'un lot de 842 livres identiques dans 19 caisses. Chaque caisse peut contenir jusqu'à 50 livres. Combien doit-il mettre de livres dans chaque caisse ?

4°)
Les réponses aux deux problèmes de la question 3 peuvent être trouvées en calculant le quotient dans la division euclidienne de 842 par 19 alors que la réponse à la question « Combien de livres contient une caisse pleine ? » du problème initial ne peut être trouvée en calculant ce même quotient.
Le premier problème de la question 3 est un problème de regroupement (division-quotition) alors que le deuxième problème de la question 3 est un problème de partage (division-partition).

Question complémentaire

1°) CM2

a) Les élèves de CM2 peuvent calculer le nombre total de caramels (9 × 5 × 3 = 135), calculer le nombre total d'élèves (6 + 9 +7 = 22) et effectuer la division de 135 par 22 : comme le quotient vaut 6, chaque élève aura 6 caramels (et il restera 3 caramels).

b) Réponses possibles pour les compétences mises en œuvre :
- savoir trouver le nombre d'éléments d'une collection organisée en couches rectangulaires en utilisant des multiplications
- savoir trouver le nombre d'éléments d'un ensemble constitués de plusieurs sous-ensembles en utilisant des additions
- savoir qu'un problème de partage équitable peut être résolu en utilisant la division euclidienne
- savoir effectuer la division de 135 par 22

c) Problème de réinvestissement, dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.

2°) CE2

a) Les élèves de CE2 peuvent calculer le nombre total de caramels en calculant combien il y a de caramels dans une couche (9 × 5 = 45) puis en multipliant le résultat trouvé par le nombre de couches (45 × 3 = 135) puis calculer le nombre total d'élèves (6 + 9 +7 = 22). Pour trouver le nombre de caramels donnés à chacun, ils peuvent mettre en œuvre une procédure par essais multiplicatifs successifs :
« 22 × 10 = 220 trop grand
22 x 5 = 110 trop petit
22 × 6 = 132 trop petit
22 × 7 = 154 trop grand
On donnera donc 6 caramels à chacun et il restera 3 caramels ».

b) Réponses possibles pour les compétences mises en œuvre :
- savoir trouver le nombre d'éléments d'une collection organisée en couches rectangulaires en utilisant des multiplications
- savoir trouver le nombre d'éléments d'un ensemble constitués de plusieurs sous-ensembles en utilisant des additions
- dans une situation de partage, savoir mettre en œuvre une démarche par essais multiplicatifs successifs pour trouver la valeur d'une part
- savoir effectuer les multiplications requises

c) Réponses possibles :
- pour le calcul du nombre total de caramels : utilisation de boîtes et de caramels ou d'objets tenant lieu de caramels (il peut être intéressant de donner un nombre de caramels permettant d'amorcer le remplissage - un peu plus d'une couche – mais en nombre insuffisant pour remplir la boîte)
- pour la résolution du problème de partage : distributions de caramels ou d'objets tenant lieu de caramels (pour aller vers la démarche par essais multiplicatifs successifs, ce qui est intéressant c'est d'amener les élèves à se poser des questions du genre : « peut-on distribuer 3 par 3 ? 4 par 4 ? etc.)

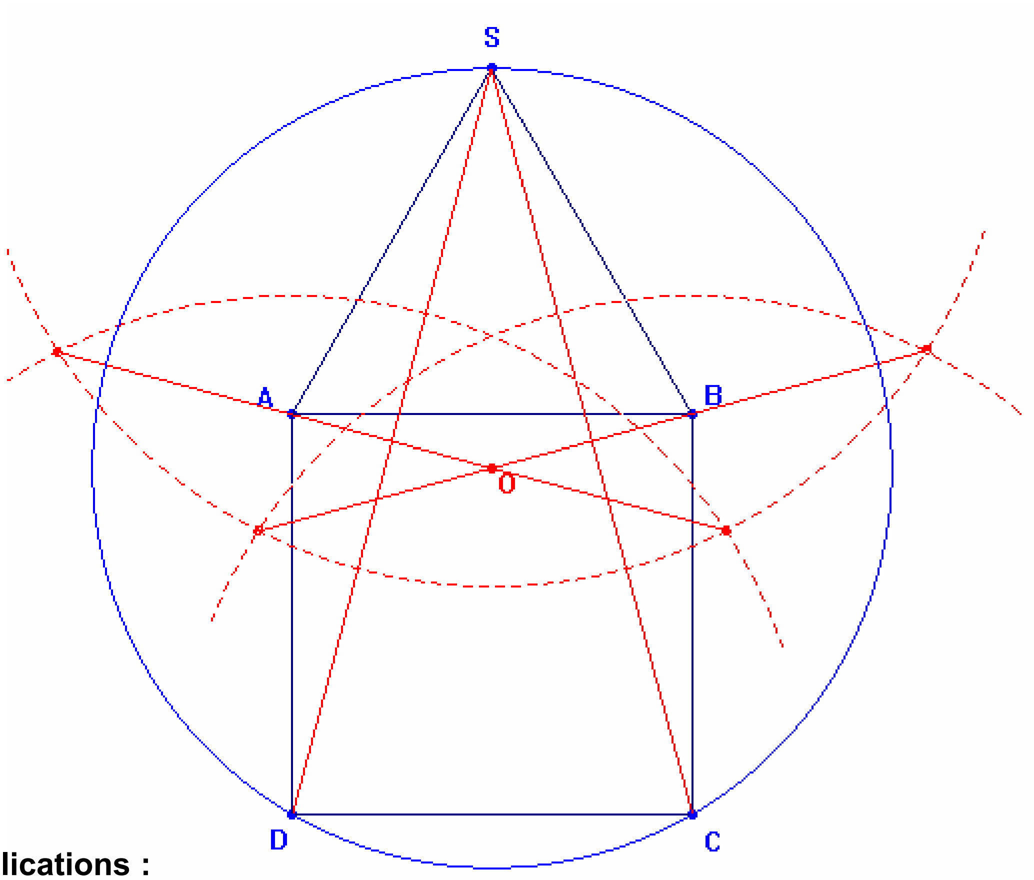
3°) CE1

Dénombrement des caramels :
Les élèves de CE1 peuvent dénombrer les caramels en les regroupant par paquets de 10 (remarque : on pourra ne pas leur donner la boîte de caramels et leur demander, en préalable au dénombrement, de produire une configuration de cubes comportant autant de cubes que de caramels dans la boîte).

Partage :
Les élèves peuvent procéder à des distributions 1 par 1, 2 par 2, … mais il pourra être intéressant de les amener à anticiper en leur posant des questions du type : « peut-on donner 10 caramels à chacun ? »

Exercice 2

1°) Construction
a)



b) Explications :

O est le centre du cercle circonscrit au triangle SDC. Il est donc le point d'intersection des médiatrices de ce triangle. Il suffit donc de tracer deux de ces médiatrices (pour la figure ci-dessus, on a choisi de construire les médiatrices des segments [SD] et [SC]).

2°) Démonstrations

a) Première proposition :
O est sur la médiatrice de [DC] (voir 1°) donc aussi sur la médiatrice de [AB] (car ABCD est un carré et car les médiatrices des côtés opposés d'un carré sont confondues).
S est, bien sûr, aussi sur la médiatrice de [AB] (car ABC est un triangle équilatéral).
La médiatrice du segment [AB] est donc la droite (OS).

Comme ABC est un triangle équilatéral, (SO) qui est la médiatrice de [AB] est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{ASB}$. Comme $\widehat{ASB}$ = 60° (car ABC est un triangle équilatéral), on en déduit que $\widehat{ASO} = \frac{60°}{2} = 30°$).

Par ailleurs, le triangle ASD est un triangle isocèle de sommet A (en effet SA = AB car ABC est un triangle équilatéral et AD = AB car ABCD est un carré donc SA = AD).
On en déduit que :

$$\widehat{ASD} = \frac{180° - \widehat{DAS}}{2} = \frac{180° - (\widehat{DAB} + \widehat{BAS})}{2} = \frac{180° - (90° + 60°)}{2} = 15°$$

Comme $\widehat{ASO}$ = 30° et $\widehat{ASD}$ = 15°, on peut en conclure que **(SD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ASO}$**.

Deuxième proposition :

O est sur la médiatrice du segment [DC] (voir 1°) donc la droite (SO) est perpendiculaire à la droite (DC).
Comme ABCD est un carré, la droite (AD) est également perpendiculaire à la droite (DC).
Les droites (SO) et (AD) qui sont toutes deux perpendiculaires à la droite (DC) sont donc parallèles.
On en déduit que les angles alternes-internes $\widehat{ADS}$ et $\widehat{DSO}$ sont égaux.

Par ailleurs, le triangle ASD est un triangle isocèle de sommet A (en effet SA = AB car ABC est un triangle équilatéral et AD = AB car ABCD est un carré donc SA = AD).
On en déduit que les angles $\widehat{ADS}$ et $\widehat{ASD}$ sont égaux.

On peut en conclure que les angles $\widehat{ASD}$ et $\widehat{DSO}$ sont égaux et donc que **(SD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ASO}$**.

b)
Soit I le point d'intersection des droites (AO) et (SD).

On sait que OS = OD (car S et D sont sur un même cercle de centre O) donc O est sur la médiatrice de [SD].
On sait aussi que SA = AD (car SA = AB et AD = AB puisque ABC est un triangle équilatéral et ABCD un carré). Donc A est aussi sur la médiatrice de [SD].
Donc la droite (AO) est la médiatrice du segment [SD].
Donc la droite (AO) est perpendiculaire à la droite (SD) et donc à la droite (SI) car les droites (SD) et (SI) sont confondues.

Si l'on considère les triangles SAI et SOI, on sait que :
$\widehat{ASI} = \widehat{OSI}$ (voir 1°) et $\widehat{SIA} = \widehat{SIO}$ $(= 90°)$ (voir ci-dessus).
Les triangles SAI et SOI ont donc un côté commun (le côté [SI]) adjacent à deux angles respectivement égaux. On en déduit qu'ils sont isométriques.
Conséquence : SA = SO.
Comme on savait déjà que AS = AD et OD = OS, on en déduit que AS = SO = OD = DA et donc que **SODA est un losange**.

On en déduit que le cercle a un rayon égal à a.

Pour voir la construction correspondant à ce programme :

http://dpernoux.free.fr/ExPE1/CB2.htm

ou

http://dpernoux.free.fr/Images/declic.avi

Questions complémentaires :

1°) Programme de construction possible :

Créer un point
Nommer le point O.
Construire un cercle de centre O et de rayon de longueur 3 cm (cercle C_1)
Construire un point sur le cercle C_1
Nommer le point D
Construire un cercle de centre D et de rayon de longueur 3 cm (cercle C_2)
Construire l'intersection de C_1 *et* C_2
Nommer le point C (on choisit parmi les points d'intersection construits précédemment celui que l'on veut pour obtenir la figure demandée)
Construire un segment défini par ses extrémités (points D et C)
Construire le milieu du segment [DC]
Construire la perpendiculaire à [DC] passant par le point « milieu du segment [DC]»
Construire l'intersection de « cette perpendiculaire » et du cercle C_1
Nommer le point S (on choisit parmi les points d'intersection construits précédemment celui que l'on veut pour obtenir la figure demandée)
Construire la perpendiculaire à [DC] passant par D
Construire un cercle de centre S et de rayon de longueur 3 cm (cercle C_3)
Construire l'intersection de « cette perpendiculaire » et de C_3
Nommer le point A (on choisit parmi les points d'intersection construits précédemment celui que l'on veut pour obtenir la figure demandée)
Construire la perpendiculaire à [DC] passant par C
Construire l'intersection de «cette perpendiculaire » et de C_3
Nommer le point B (on choisit parmi les points d'intersection construits précédemment celui que l'on veut pour obtenir la figure demandée)
Construire le polygone de 3 sommets défini par les points A, B, C
Construire le polygone de 4 sommets défini par les points A, B, C, D

2°)

a) Réponse possibles pour les compétences nécessaires :
- Identifier, de manière perceptive, une figure simple dans une configuration plus complexe
- vérifier l'existence d'une figure simple dans une figure complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments
- tracer une figure à partir de la donnée d'un modèle

On peut ajouter :
- savoir utiliser les instruments (règle, équerre, compas) pour vérifier (l'alignement, la perpendicularité, l'égalité de longueurs) et tracer.

b) Ce problème peut être rangé dans la catégorie des « problèmes pour chercher » car plusieurs démarches, dont aucune n'est évidente a priori, sont possibles. Les élèves doivent donc émettre des hypothèses et les tester.

c) Adaptations possibles :

- l'enseignant peut rajouter des lignes géométriques sur la figure, lignes susceptibles d'aider les élèves à mieux trouver la démarche à adopter (exemples : arc de cercle de centre S passant par A, O et B, médiatrice du segment [DC], …)

- l'enseignant peut coder la figure (marques pour les angles droits, côtés de même longueur de même couleur)
- l'enseignant peut demander aux élèves de lister les figures simples composant la figure complexe et de se rappeler les propriétés connues de ces figures

Exercice 3

Position du point M	I (départ)	A	B	K	C	D	I (arrivée)
x	**0**	**4**	**7**	**11**	**15**	**18**	**22**
V(x)	**0**	**4**	**5**	**3**	**5**	**4**	**0**
Explications			IB= $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}$		IC=IB		

1°)

2°)
Réponses possibles :

- la courbe représentative de la fonction V est continue
- la courbe représentative de la fonction V admet la droite d'équation x = 11 comme axe de symétrie (car pour deux positions M et M' du coureur symétriques par rapport à la droite (IK) les distances V(x) sont les mêmes)
- la courbe représentative de la fonction V est croissante lorsque M se déplace de I à B, puis décroissante lorsque M se déplace de B à K, puis croissante lorsque M se déplace de K à C, puis décroissante lorsque M se déplace de C à I

3°) La courbe représentative de la fonction V devant admettre la droite d'équation x=11 comme axe de symétrie, on peut éliminer les courbes 2 et 4.
La fonction V n'étant constante sur aucun intervalle, on peut éliminer la courbe 1.
Seule la courbe 3 peut donc correspondre à une représentation graphique de la fonction V (remarque : la courbe 3 possède bien les trois propriétés mises en évidence au 2°)

4°)
Pour $0 \leq x \leq 4$, on a V(x) = x.
Sur l'intervalle [0 ; 4], la représentation graphique de V est donc confondue avec la représentation graphique d'une fonction linéaire et **est donc un segment de droite qui passe par l'origine.**

La courbe représentative de la fonction V admettant la droite d'équation x = 11 comme axe de symétrie, **la représentation graphique de la fonction V sur l'intervalle [18 ; 22] est donc aussi un segment de droite** (autre justification possible : pour $18 \leq x \leq 22$, on a V(x) = -x + 22, formule du type V(x) = ax+b)

5°)
Lorsque x = 5, M est un point du segment [AJ] et le triangle IAM est rectangle en A.
En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :
V(5) = IM $=\sqrt{4^2+1^2}$ **=** $\sqrt{17}\approx$ **4,1 (en km)**

Lorsque x = 10, M est un point du segment [BK] et le triangle IKM est un triangle rectangle en K.
En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :
V(10) =IM = $\sqrt{3^2+1^2}$ **=** $\sqrt{10}\approx 3,2$ **(en km)**

6°)

Réduire le parcours de 25 %, revient à réduire le périmètre du rectangle de 25 %.
Pour cela, il suffit de réduire chacune des dimensions du rectangle de 25 %.
D'où la proposition suivante :

Nouvelle mesure pour la longueur : $8 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 8 \times 0{,}75 = \mathbf{6}$ **(en km)**

Nouvelle mesure pour la largeur : 3 × 0,75 = 2,25 **(en km)**

Voir la page suivante pour un complément non demandé concernant cet exercice.

Complément concernant l'exercice 3 (**non demandé**)

On peut démontrer que :

Si $0 \leq x \leq 4$ alors $V(x) = x$

Si $4 \leq x \leq 7$ alors $V(x) = \sqrt{4^2 + (x-4)^2}$

Si $7 \leq x \leq 11$ alors $V(x) = \sqrt{(11-x)^2 + 3^2}$

Si $11 \leq x \leq 15$ alors $V(x) = \sqrt{(x-11)^2 + 3^2}$

Si $15 \leq x \leq 18$ alors $V(x) = \sqrt{(18-x)^2 + 4^2}$

Si $18 \leq x \leq 22$ alors $V(x) = 22 - x$

$\longrightarrow$ On utilise le théorème de Pythagore

D'où la courbe représentant la fonction V :